12

केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप
(Measures of Central Tendency)

अनुसन्धान में संकलित तथ्य एक प्रकार के कच्चे माल की तरह होते हैं अत: इनसे कुछ निष्कर्ष निकालने के लिए इन्हें क्रमबद्ध, निश्चित एवं सूक्ष्म रूप प्रदान करना अनिवार्य है। यदि गुणात्मक (Qualitative) आँकड़े संकलित किए हैं तो इन्हें पहले परिमाणात्मक (Quantitative) आँकड़ों में परिवर्तित किया जाता है तथा फिर श्रेणियों एवं सारणियों के रूप में क्रमबद्ध करके सांख्यिकीय विधियों द्वारा इनका विश्लेषण किया जाता है। केन्द्रीय प्रवृत्तियों के माप अथवा सांख्यिकीय औसत सांख्यिकीय विधियों में सबसे महत्त्वपूर्ण हैं, जिनसे हमें आँकड़ों के औसत के मूल्यों का पता चल जाता है जोकि आँकड़ों का प्रतिनिधित्व करते हैं। जब हमें औसत मूल्य का पता चल जाता है तो इससे हम आँकड़ों के विस्तार का वर्णन कर सकते हैं। इस प्रकार, केन्द्रीय प्रवृत्तियों के माप आँकड़ों के वृहद् समूह का प्रतिनिधित्व करते हैं। माध्य प्रवृत्तियों के मापों का उद्देश्य औसत मूल्यों का पता लगाना है जिनके इर्द-गिर्द आँकड़े गुच्छित (Clustered) होते हैं।

औसत (माध्य) अथवा केन्द्रीय प्रवृत्तियों के माप का अर्थ एवं परिभाषाएँ
(Meaning and Definitions of Averages or Measures of Central Tendency)

केन्द्रीय प्रवृत्तियों के मापों को केवल 'औसत' या 'माध्य' (Average) भी कहा जाता है। औसत वह मूल्य है जो कि सामग्री के वृहद् समूह का प्रतिनिधित्व करता है। उदाहरण के लिए—यदि हमें 500 छात्रों के प्राप्तांकों का पता चल जाए अथवा 500 व्यक्तियों की मासिक आय का पता चल जाए तो इन्हें देखकर हम कोई निष्कर्ष नहीं निकाल सकते। अगर हमें छात्रों के प्राप्तांकों का औसत या व्यक्तियों की मासिक आय के औसत का पता चल जाए तो हम निश्चित अनुमान लगा लेते हैं कि छात्रों के उस समूह का प्रदर्शन (Performance) कैसा है अथवा व्यक्तियों के समूह की आय कितनी है। औसत से हमें ऐसे मूल्यों का पता चल जाता है जिनके चारों ओर आँकड़ों का विस्तार होता है। औसत के प्रयोग द्वारा जटिल समूहों तथा विशाल संख्याओं को कुछ महत्त्वपूर्ण शब्दों अथवा संख्याओं द्वारा व्यक्त किया जा सकता है। औसत की परिभाषाएँ निम्नलिखित प्रकार से दी गई हैं—

(1) एलहांस (Elhance) के अनुसार—''यह स्वाभाविक है कि संख्या, जिसका प्रयोग समय श्रेणियों का प्रतिनिधित्व करने के लिए किया जाता है, न ही तो श्रेणियों में न्यूनतम मूल्य रखती है और न ही अधिकतम, बल्कि वह मूल्य तो इन दोनों सीमाओं के बीच का मूल्य होता है तथा सम्भवत: केन्द्र में स्थित होता है जहाँ श्रेणियों की अधिकांश इकाइयाँ गुच्छित हो जाती हैं। इसी अंक या संख्या को माध्य प्रवृत्तियों के माप अथवा औसत कहा जाता है।''

(2) क्लार्क एवं **शिकाडे** (Clark and Schkade) के अनुसार—''औसत सम्पूर्ण समंकों के समूह का विवरण देने वाली एकमात्र संख्या प्राप्त करने का प्रयत्न है।''

(3) ग्रिफिन (Griffin) के अनुसार—''सांख्यिकीय अर्थ में क्योंकि औसत एक अवलोकन समूह के समस्त मूल्यों के प्रतिनिधित्व के रूप में प्रयुक्त एक मूल्य होता है, इसलिए एक औसत को केन्द्रित मूल्य का माप माना जा सकता है।''

उपर्युक्त परिभाषाओं से स्पष्ट हो जाता है कि औसत वह मूल्य है जो कि श्रेणी (जिससे वह लिया गया है) के समस्त अंकों का प्रतिनिधित्व करता है। यह एक ऐसा अकेला कथन है जिसमें एक सामूहिक वर्ग अथवा बहुत सी संख्याओं का मूल परिणाम केन्द्रित होता है।

एक अच्छे औसत की विशेषताएँ
(Characteristics of a good Average)

एक अच्छे औसत में अग्रलिखित प्रमुख विशेषताएँ होती हैं—

(1) प्रतिनिधित्व (Representativeness)—एक श्रेष्ठ औसत वह है जो कि उस श्रेणी अथवा समूह की विशेषताओं का प्रतिनिधित्व करता है जिससे वह लिया गया है। यह श्रेणी के समस्त पदों पर आधारित होता है।

(2) निश्चितता (Definiteness)—एक श्रेष्ठ औसत में सदैव एक निश्चित संख्या होनी चाहिए ताकि उसे प्रत्येक व्यक्ति भली प्रकार से समझ सके अर्थात् उसे समझने में किसी प्रकार का अनुमान न लगाना पड़े।

(3) सरलता (Simplicity)—एक श्रेष्ठ औसत को निश्चित एवं स्पष्ट होने के साथ-साथ सरल होना चाहिए अर्थात् यदि औसत (माध्य) सरलतापूर्वक निकाला जा सके तो ही अच्छा औसत कहा जाएगा।

(4) व्यावहारिकता (Applicability)—एक श्रेष्ठ औसत व्यावहारिक होना चाहिए अर्थात् इसे केवल मूल परिवर्तनों को ही प्रदर्शित करना चाहिए, न कि आकस्मिक परिवर्तनों को। साथ ही, इस पर आकस्मिक परिवर्तन का अधिक प्रभाव नहीं होना चाहिए।

(5) पदमाला के सभी पदों पर आधारित (Based on all the values in the series)—एक श्रेष्ठ औसत पदमाला के समस्त पदों पर आधारित होना चाहिए।

(6) निदर्शनों से कम प्रभावित (Less affected by samples)—औसत पर निदर्शन में होने वाले उतार-चढ़ाव का प्रभाव कम-से-कम होना चाहिए।

इसके अतिरिक्त एक श्रेष्ठ औसत में सीमान्त पदों का समुचित महत्त्व होना चाहिए और इसे समूह की सभी विशेषताओं को स्पष्ट करना चाहिए, न कि केवल बाहर के क्षेत्र की विशेषताओं को। साथ ही इसमें अंकगणित और बीजगणित की सभी विधियों द्वारा सुगमता से निकाले जाने का गुण भी होना चाहिए।

औसत के गुण
(Merits of Average)

औसत के प्रमुख गुण निम्नलिखित हैं—

(1) संक्षिप्त एवं सूक्ष्म रूप प्रदान करना (Summarization and precision)—औसत का सर्वप्रथम गुण यह है कि इसमें विशाल आँकड़ों को संक्षिप्त एवं सूक्ष्म रूप प्रदान किया जा सकता है। यह जटिल अंक-समूहों को सरल बनाकर प्रस्तुत करता है।

(2) तुलना (Comparison)—औसत दो अंक समूहों अथवा आँकड़ों की तुलना करने में सहायता प्रदान करता है। यदि समूहों के आँकड़े हमारे पास हों तो उनकी तुलना नहीं हो सकती परन्तु यदि हम उनके औसत निकाल लें तो तुलनात्मक अध्ययन सरलता से हो जाता है।

(3) सम्बन्ध एवं अनुपात निर्धारण (Establishing relations and ratios)—औसत दो या अधिक समूहों के पारस्परिक सम्बन्धों के निर्धारण, उनमें होने वाले परिवर्तनों तथा विभिन्न पदमालाओं या तथ्यों के पारस्परिक अनुपात की भी जानकारी प्रदान करने में सहायता प्रदान करते हैं।

(4) सरल विश्लेषण (Simple analysis)—औसत विशाल आँकड़ों के विश्लेषण को सरल बनाते हैं। सामान्य व्यक्ति भी औसत (माध्य) द्वारा विशाल आँकड़ों को समझ सकता है।

(5) भावी दिशा निर्धारण (Indicating future directions)—औसत केवल भूतकालिक तथा वर्तमान तथ्यों के बीच तुलनात्मक अध्ययन को ही सरल नहीं बनाते अपितु भविष्य के लिए तुलना का आधार भी निश्चित करते हैं तथा भावी कार्यक्रमों की दिशा निर्धारण करने में सहायता प्रदान करते हैं।

औसत के अवगुण
(Demerits of Average)

औसत के प्रमुख अवगुण निम्नलिखित हैं—

(1) दुरुपयोग (Misuse)—यदि औसत का चुनाव ठीक से नहीं किया गया तो इसका दुरुपयोग हो सकता है तथा परिणाम प्रभावित हो सकते हैं। गलत औसत के कारण सांख्यिकी के प्रति अविश्वास पैदा हो जाता है।

(2) वास्तविक प्रवृत्ति का पता न लगना (Not revealing real tendency)—औसत समस्त तथ्यों का प्रतिनिधि रूप-मात्र होता है तथा इससे वास्तविक प्रवृत्तियों का पता नहीं चलता। इससे वास्तविक स्थिति का पता इसलिए नहीं चलता क्योंकि इससे कमी या वृद्धि का ज्ञान नहीं होता।

(3) गणितीय त्रुटियाँ (Mathematical errors)—औसत ज्ञात करते समय गणितीय त्रुटियाँ रह जाने की आशंका रहती है। इन त्रुटियों के कारण औसत गलत भी हो सकता है।

(4) अविभाजित वस्तुओं में अनुपयोगी (Unsuitable for indivisible things)—प्राय: अंकगणितीय औसत पूरी इकाइयों के रूप में नहीं निकलता है। अविभाजित इकाइयों; जैसे मनुष्यों, पशुओं, मोटरगाड़ियों इत्यादि के सन्दर्भ में यदि औसत पूर्ण संख्या नहीं है (जैसे $4\frac{1}{2}$ व्यक्ति, $1\frac{1}{2}$ पशु, $3\frac{1}{4}$ मोटरगाड़ियाँ) तो यह हास्यास्पद-सा लगता है।

(5) अनिश्चित तुलनाएँ (Uncertain comparisons)—औसत क्योंकि वास्तविक प्रवृत्तियों को व्यक्त नहीं करते अत: इनसे वास्तविक तुलना करके सही निष्कर्ष निकालना कठिन हो जाता है। औसत के द्वारा एक पक्ष में समानता स्थापित करके भी वास्तविक तुलना नहीं हो सकती।

औसत के अवगुणों के बावजूद इसका प्रयोग विविध क्षेत्रों में किया जाता है। राजकीय, व्यापारिक एवं सामाजिक क्षेत्रों, तुलनात्मक अध्ययनों, सामाजिक स्थितियों में होने वाले परिवर्तनों, सहसम्बन्ध का पता लगाने तथा विभिन्न तथ्यों के गणितीय विश्लेषण में औसतों का महत्त्वपूर्ण रूप से प्रयोग किया जाता है।

सांख्यिकीय औसतों के प्रकार
(Types of Statistical Averages)

आँकड़ों के सांख्यिकीय विश्लेषण में अनेक प्रकार के औसतों का प्रयोग किया जाता है। औसतों को मुख्य रूप से दो श्रेणियों में विभाजित किया जा सकता है—(i) प्रथम क्रम के औसत (Average of the first order) जिनका निर्धारण प्राथमिक आँकड़ों के आधार पर किया जाता है, तथा (ii) द्वितीय क्रम के औसत (Average of the second order) जिनमें उन आँकड़ों का प्रयोग किया जाता है जोकि प्राथमिक आँकड़ों की सहायता से बनाए जाते हैं। माध्य, मध्यका, भूयिष्ठक इत्यादि पहली श्रेणी के तथा चल माध्य एवं प्रगामी माध्य इत्यादि दूसरी श्रेणी के उदाहरण हैं। सामाजिक अनुसन्धान में मुख्य रूप से निम्नलिखित तीन औसतों का ही प्रयोग किया जाता है—अंकगणितीय या समान्तर माध्य (मध्यक), मध्यका तथा भूयिष्ठक।

अंकगणितीय माध्य
[ARITHMETIC MEAN]

सांख्यिकीय विश्लेषण में अंकगणितीय माध्य (मध्यक) का सर्वाधिक प्रयोग किया जाता है। इसे माध्य, मध्यमान, साधारण मध्यक अथवा औसत भी कहा जाता है। माध्य वह मूल्य है जोकि किसी पदमाला अथवा श्रेणी के समस्त पदों के मूल्यों के योग को उनकी संख्या से भाग देने पर प्राप्त होता है।

अंकगणित में जो औसत निकाला जाता है उसी को माध्य कहा जाता है। **सेक्रिस्ट** (Secrist) के अनुसार, ''समंकमाला के पदों के मूल्यों के योग को उनकी संख्या से भाग देने से जो संख्या प्राप्त होती है वह माध्य कहलाती है।'' माध्य निकालने में प्रत्येक पद-मूल्य को समान स्थान दिया जाता है और इसकी गणना केवल एक बार ही की जाती है।

माध्य के गुण
(Merits of Mean)

माध्य के प्रमुख गुण निम्नलिखित हैं—

(1) इसको सरलता एवं सुगमतापूर्वक निकाला जा सकता है।

(2) इसको निकालने में तथ्यों को किसी विशेष क्रम में रखने की आवश्यकता नहीं है।

(3) माध्य से केन्द्रीय प्रवृत्ति का निश्चित रूप से पता चलता है।

(4) यह सभी आँकड़ों पर आधारित होता है अत: समूह का अधिक प्रतिनिधित्व करने वाला होता है।

(5) इसकी गणना में किसी प्रकार के पक्षपात की कोई सम्भावना नहीं होती है।

(6) यह अंकगणित तथा बीजगणित दोनों ही पद्धतियों द्वारा सरलता से निकाला जा सकता है।

(7) यह दो समंक-समूहों की तुलना करने में सहायक है।

(8) इससे परिणाम की जाँच करना सुविधापूर्ण है।

माध्य के अवगुण
(Demerits of Mean)

माध्य के प्रमुख अवगुण या सीमाएँ अग्रलिखित हैं—

(1) इसकी गणना भूयिष्ठक एवं मध्यका की अपेक्षा कठिन है क्योंकि उनका पता केवल ऊपरी अवलोकन से ही लगाया जा सकता है।

(2) इसमें न्यूनतम एवं अधिकतम संख्या को समान महत्त्व दिया जाता है जिसके कारण कई बार यह भ्रामक होता है।

(3) अधिकतर यह ऐसी संख्या होती है जोकि पदमाला में स्थित नहीं होती। उदाहरण के लिए 2, 4, 6 और 8 का माध्य 5 है जोकि पदमाला में स्थित नहीं है।

(4) यदि पदमाला में कोई पद गायब है तो इसका पता माध्य द्वारा नहीं लगाया जा सकता।

(5) माध्य के परिणाम प्राय: निरर्थक होते हैं क्योंकि इसके परिणाम अधिकतर दशमलव में होते हैं। अविभाजित वस्तुओं की संख्या भी दशमलव में होती है।

(6) इससे तुलना भ्रामक हो सकती है।

(7) गुणात्मक अध्ययनों में इसका प्रयोग नहीं किया जा सकता।

माध्य निकालने की विधि
(Calculation of Mean)

माध्य किस विधि द्वारा निकाला जाएगा यह इस बात पर निर्भर करता है कि श्रेणी किस प्रकार की है। व्यक्तिगत श्रेणी, खण्डित श्रेणी तथा अखण्डित श्रेणी में माध्य निम्न प्रकार से निकाला जाता है—

(1) व्यक्तिगत अथवा सरल श्रेणी में माध्य निकालना
(Calculation of Mean in Individual or Simple Series)

व्यक्तिगत श्रेणी में माध्य निकालने की बड़ी सरल विधि है। जैसा कि माध्य की परिभाषा से स्पष्ट हो जाता है इसे सभी पदों का योग करके उसके पदों की संख्या से विभाजित करके निकाला जाता है। इस विधि को **प्रत्यक्ष विधि** या **दीर्घ विधि** (Long method) भी कहते हैं। इसे निम्नांकित सूत्र द्वारा व्यक्त किया जा सकता है—

$$\boxed{\bar{X} \quad \frac{x}{N}}$$

जहाँ, $\bar{X}$ माध्य,
योग का चिह्न,
x पदों का मूल्य तथा
N पदों की संख्या।

इसे उदाहरण 1 तथा उदाहरण 2 द्वारा अधिक स्पष्ट किया जा सकता है।

उदाहरण 1—निम्नांकित पदों का साधारण माध्य ज्ञात कीजिए—

5, 6, 8, 10, 11.

हल : माध्य निम्नलिखित सूत्र द्वारा निकाला जाता है—

सूत्र, माध्य $\bar{X} \quad \frac{x}{N}$

यहाँ, x 5 6 8 10 11 40

$N \quad 5$

$\bar{X} \quad \frac{40}{5}$

$\bar{X} \quad 8$ **उत्तर**

उदाहरण 2—एक मालिक अपने नौकरों को निम्नलिखित साप्ताहिक वेतन देता है। उसके द्वारा दिया जाने वाला माध्य वेतन ज्ञात कीजिए—

रुपये 13·50, 20·50, 27·40, 36·60, 49·10, 65·60, 87·80, 119·50

हल :

सूत्र, $\overline{X} \quad \frac{x}{N}$

$$\overline{X} \quad \frac{13\ 50 \quad 20\ 50 \quad 27\ 40 \quad 36\ 60 \quad 49\ 10 \quad 65\ 60 \quad 87\ 80 \quad 119\ 50}{8}$$

$$\overline{X} \quad \frac{420\ 00}{8}$$

$\overline{X} \quad 52\ 50$ रुपये **उत्तर**

माध्य को; यदि पदों की संख्या अधिक है तो; **लघु विधि** अथवा **परोक्ष विधि** (Short-cut method) द्वारा भी निकाला जा सकता है। इसमें सर्वप्रथम एक काल्पनिक माध्य लिया जाता है और फिर उससे विभिन्न पदों के विचलनों (Deviations) को निकाला जाता है। इसे निम्नांकित सूत्र द्वारा व्यक्त किया जा सकता है—

$$\boxed{\overline{X} = A + \frac{dx}{N}}$$

जहाँ, $\overline{X}$ = माध्य

A = काल्पनिक माध्य,

dx = काल्पनिक माध्य से समस्त विचलनों का योग, तथा

N = इकाइयों की संख्या।

इसे उदाहरण 3 द्वारा अधिक स्पष्ट रूप से समझा जा सकता है।

उदाहरण 3—मान लीजिए हमें उदाहरण 1 में दिए गए पदों का माध्य लघु विधि द्वारा निकालना है तो हम इसे निम्नांकित प्रकार से ज्ञात कर सकते हैं—

हल : सूत्र, $\overline{X} \quad A \quad \frac{dx}{N}$

मान लीजिए कि काल्पनिक माध्य 10 है।

x	**dx (x - A)**
5	5
6	4
8	2
10	0
11	1
	$dx \quad 10$

अतः, $\overline{X} \quad 10 \quad \frac{10}{5}$

$\overline{X} \quad 10 \quad 2$

$\overline{X} \quad 8$ **उत्तर**

(2) खण्डित या विच्छिन्न श्रेणी से माध्य निकालना
(Calculation of Mean in Discrete Series)

खण्डित श्रेणी में भी माध्य प्रत्यक्ष अथवा परोक्ष (लघु विधि) विधि द्वारा निकाला जा सकता है। प्रत्यक्ष विधि द्वारा माध्य अग्रांकित सूत्र द्वारा निकाला जा सकता है—

$$\boxed{M = \frac{fx}{f}} \quad \text{अथवा} \quad \boxed{\overline{X} = \frac{fx}{N}}$$

यहाँ, M या $\overline{X}$ = माध्य,

f = आवृत्ति

x = पद (प्रदत्त मूल्य)

fx = पद आवृत्तियों का कुल योग

f = आवृत्तियों का योग (N आवृत्तियों का योग)

इसे हम उदाहरण 4 द्वारा स्पष्ट कर सकते हैं।

उदाहरण 4—निम्नलिखित पदों का माध्य ज्ञात कीजिए—

x	1	2	3	4	5	6
f	1	8	9	11	7	3

इस उदाहरण में चर के माप या मूल्य 1, 2, 3, 4, 5 तथा 6 हैं और इनके अनुरूप आवृत्तियाँ क्रमशः 1, 8, 9, 11, 7 तथा 3 हैं। माध्य को निम्नांकित प्रकार से ज्ञात किया जा सकता है—

सूत्र, $\overline{X} = \frac{fx}{f}$

$$\overline{X} \quad \frac{1\ \ 1\ \ 2\ \ 8\ \ 3\ \ 9\ \ 4\ \ 11\ \ 5\ \ 7\ \ 6\ \ 3}{1\ \ 8\ \ 9\ \ 11\ \ 7\ \ 3}$$

$$\overline{X} \quad \frac{1\ \ 16\ \ 27\ \ 44\ \ 35\ \ 18}{39}$$

$$\overline{X} \quad \frac{141}{39} \quad 3\ 61$$

उत्तर

खण्डित श्रेणी में लघु विधि या परोक्ष विधि द्वारा माध्य निकालने के सूत्र निम्नलिखित हैं—

$$\boxed{M \quad A \quad \frac{fdx}{f}} \quad \text{अथवा} \quad \boxed{\overline{X} \quad A \quad \frac{fdx}{N}}$$

जहाँ, $\overline{X}$ माध्य

A काल्पनिक माध्य

fdx आवृत्ति तथा विचलनों के गुणांक (गुणनफल) का योग

f आवृत्तियों का योग (N आवृत्तियों का योग)

इसे उदाहरण 5 द्वारा स्पष्ट रूप से समझा जा सकता है।

उदाहरण 5—मान लीजिए हमें उदाहरण 4 में दिए गए वितरण का माध्य लघु विधि द्वारा निकालना है, तो हम इसे निम्नांकित प्रकार से ज्ञात कर सकते हैं—

हल : मान लीजिए कि काल्पनिक माध्य 4 है।

x	f	dx (x - A)	fdx
1	1	3	3
2	8	2	16
3	9	1	9
4	11	0	0
5	7	1	7
6	3	2	6
	$N \quad f \quad 39$		$fdx \quad 15$

सूत्र, $\bar{X} \quad A \quad \frac{fdx}{N}$

$$\bar{X} \quad 4 \quad \frac{15}{39}$$

$$\bar{X} \quad 4 \quad \frac{5}{13}$$

$$\bar{X} \quad 4 \quad \frac{5}{13}$$

$$\bar{X} \quad 4 \quad 0\ 38$$

$$\bar{X} \quad 3\ 62$$

उत्तर

(3) सतत अथवा अखण्डित श्रेणी से माध्य निकालना (Calculation of Mean in Continuous Series)

सतत श्रेणी में भी माध्य प्रत्यक्ष विधि एवं परोक्ष विधि द्वारा निकाला जा सकता है। प्रत्यक्ष विधि में पहले मध्य बिन्दु (m) निकाला जाता है तथा इसे आवृत्तियों (f) से गुणा करके mf तथा इनका योग mf निकाला जाता है। इसे आवृत्ति के योग से भाग देकर माध्य निकाला जाता है। अत: प्रत्यक्ष विधि में निम्नांकित सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$\boxed{\bar{X} \quad \frac{mf}{N}}$$

इसे उदाहरण 6 द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है।

उदाहरण 6—एक कक्षा में बच्चों के भार का वितरण निम्नलिखित है, इस वितरण में माध्य ज्ञात कीजिए—

किलोग्राम में भार	बच्चों की संख्या (आवृत्ति)
20—25	6
25—30	11
30—35	15
35—40	9
40—45	7
45—50	2

इसमें पहले हमें निम्न प्रकार से मध्य बिन्दु तथा फिर mf निकालना होगा—

किलोग्राम में भार (वर्गान्तर)	मध्य बिन्दु (m)	आवृत्ति (f)	f m
20—25	225	6	135·0
25—30	275	11	302·5
30—35	325	15	487·5
35—40	375	9	337·5
40—45	425	7	297·5
45—50	475	2	95·0
		N or f 50	mf=1655·0

सूत्र, $$\bar{X} \quad \frac{.mf}{N}$$

$$\bar{X} \quad \frac{1655}{50}$$

$\bar{X}$ 33 1 किग्रा **उत्तर**

लघु अथवा परोक्ष विधि में माध्य निम्नांकित सूत्र द्वारा निकाला जाता है—

$$\boxed{\bar{X} \quad A \quad \frac{fd}{N} \quad i}$$

जहाँ, $d \quad \frac{A \quad x}{i}$

X मध्य पद,

A कल्पित माध्य, तथा

i वर्गान्तर।

नोट—कल्पित माध्य प्राय: मध्य बिन्दुओं के बीच का मूल्य लिया जाता है। इसे उदाहरण 7 द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है।

उदाहरण 7—मान लीजिए हमें उदाहरण 6 में दिए गए आवृत्ति वितरण से लघु विधि द्वारा माध्य ज्ञात करना है, तो इसे निम्न प्रकार से ज्ञात किया जा सकता है—

हल : मान लीजिए कि काल्पनिक माध्य $A = 32·5$ है

वर्ग	x	f	$d = \frac{x - A}{i}$	fd
20—25	22·5	6	—2	—12
25—30	27·5	11	—1	—11
30—35	32·5	15	0	0
35—40	37·5	9	1	9
40—45	42·5	7	2	14
45—50	47·5	2	3	6
		N or f 50		fd=6

सूत्र, $$\bar{X} \quad A \quad \frac{fd}{N} \quad i$$

$$\bar{X} \quad 32\ 5 \quad \frac{6}{50} \quad 5$$

$$\bar{X} \quad 32\ 5 \quad 0\ 60$$

$$\bar{X} \quad 33\ 1 \text{ किग्रा}$$

उत्तर

भारित समान्तर माध्य अथवा मध्यक
(Weighted Arithmetic Mean)

समान्तर माध्य में किसी श्रेणी के विभिन्न पदों को समान महत्त्व दिया जाता है जिसके कारण कई बार यह सही निष्कर्ष नहीं देता क्योंकि विभिन्न पद मूल्यों का अपना भिन्न-भिन्न महत्त्व होता है—कुछ पद कम महत्त्वपूर्ण होते हैं और कुछ अधिक महत्त्वपूर्ण। भारित समान्तर माध्य में पदों के महत्त्व का ध्यान रखा जाता है। सर्वप्रथम विभिन्न पदों के भार का पता लगाया जाता है। भार वास्तविक (Actual) भी हो सकता है (जोकि स्पष्ट रूप से दिया हुआ हो) और काल्पनिक (Estimated) भी (जिसे मूल्यों के सापेक्षिक महत्त्व को ध्यान में रखते हुए स्वयं माना जाता है)। भारित माध्य के लिए प्रत्येक पद को उसके भार से गुणा किया जाता है और इस प्रकार के गुणनफल के योग को भारों की संख्या के योग से विभाजित कर दिया जाता है।

बोडिंगटन (Boddington) के अनुसार, भारित माध्य वह है जिसे निकालने के लिए प्रत्येक पद को भार से गुणा किया जाता है और इस प्रकार प्राप्त की गई संख्याओं को जोड़कर भार के योग से भाग दिया जाता है। भारित माध्य को निम्नांकित सूत्र से व्यक्त किया जा सकता है—

$$\boxed{\bar{X}_w = \frac{WX}{W}}$$

$\bar{X}_w$ = भारित समान्तर माध्य

WX = मूल्यों तथा भारों में गुणनफल का योग

W = भारों का योग

नोट—भारित माध्य को भी दोनों प्रत्यक्ष विधि तथा लघु विधि द्वारा निकाला जा सकता है। निम्नलिखित उदाहरण 8 द्वारा इसे स्पष्ट समझा जा सकता है।

उदाहरण 8—किराए के अनुरूप यात्रियों द्वारा भारण करके माध्य ज्ञात कीजिए—

यात्रा की श्रेणी	प्रति किमी किराया (पैसों में)	यात्रियों की संख्या (हजार में)
तृतीय	5	18
द्वितीय	8	10
प्रथम	14	6
डीलक्स	18	2
एयर-कण्डीशन	25	1

हल :

यात्रा की श्रेणी	किराया (X)	भार (W)	W.X
तृतीय	5	18	90
द्वितीय	8	10	80
प्रथम	14	6	84
डीलक्स	18	2	36
एयर-कण्डीशन	25	1	25
		W 37	WX 315

सूत्र, $\overline{X}_w = \frac{W.X}{W}$

$$\overline{X}_w = \frac{315}{37}$$

$\overline{X}_w = 8\ 51$ पैसे **उत्तर**

भारित माध्य में क्योंकि श्रेणी के विभिन्न पदों के महत्त्व को ध्यान में रखा जाता है, इसलिए यह माध्य से अधिक सही परिणाम देता है।

मध्यका
[MEDIAN]

मध्यका (अथवा माध्यिका) वह पद-मूल्य है जोकि आरोही (Ascending) अथवा (Descending) अर्थात् चढ़ते हुए या उतरते हुए क्रम में व्यवस्थित किसी श्रेणी को दो भागों में विभाजित करता है अर्थात् यदि किसी श्रेणी के पद-मूल्यों को हम उतरते या चढ़ते क्रम में व्यवस्थित कर दें तो बीच का पद-मूल्य (जिसके दोनों ओर बराबर पद मूल्य है) मध्यका कहलाता है। उदाहरण के लिए—यदि 9 व्यक्तियों की दैनिक मजदूरी 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 15 रुपये है तो उनकी मध्यका 7 होगी क्योंकि यह वह पद-मूल्य है जोकि श्रेणी के पद-मूल्यों को दो बराबर भागों (प्रथम चार कम पद-मूल्यों तथा बाद के चार अधिक पद-मूल्यों में) विभाजित करता है।

कॉनर (Connor) के अनुसार, ''मध्यका समंक श्रेणी का वह पद है, जो समूह को दो समान भागों में इस प्रकार से विभक्त करता है कि एक भाग में समस्त मूल्य मध्यका से अधिक और दूसरे भाग में समस्त मूल्य मध्यका से कम हों।'' इसी प्रकार, **सेक्रिस्ट** (Secrist) के अनुसार, ''एक श्रेणी की मध्यका, आकार के आधार पर क्रमबद्ध करने पर, उस पद का ऐसा अनुमानित अथवा वास्तविक मूल्य है जो वितरण को दो भागों में बाँट देता है।'' इन परिभाषाओं से यह स्पष्ट हो जाता है कि मध्यका केन्द्रीय या माध्य मूल्य होता है जोकि श्रेणी के पद-मूल्यों को दो भागों (एक भाग में मध्यका से कम मूल्य तथा दूसरे भाग में मध्यका से अधिक मूल्य) में बाँट देता है।

मध्यका की विशेषताएँ
(Characteristics of Median)

मध्यका की प्रमुख विशेषताएँ निम्नलिखित हैं—

(1) मध्यका समंक श्रेणी को दो भागों (एक भाग में मध्यका से कम पद-मूल्य तथा दूसरे से अधिक पद-मूल्य) में विभाजित करती है।

(2) यह आरोही एवं अवरोही क्रम में व्यवस्थित श्रेणी के बीच वाले पद का मूल्य है।

(3) इसका मूल्य अति सीमान्त इकाइयों में बहुत कम होता है।

(4) मध्यका का निर्धारण ग्राफ, बिन्दुरेखीय चित्रों (आलेखों) एवं चित्रों द्वारा सरलता से किया जा सकता है।

(5) इसका निर्धारण तब किया जाता है जब किसी श्रेणी के पदों को संख्यात्मक रूप से नहीं मापा जा सकता।

मध्यका के गुण
(Merits of Median)

मध्यका के प्रमुख गुण निम्नलिखित हैं—

(1) इसका निर्धारण सफलतापूर्वक किया जा सकता है।

(2) यह निश्चित और विशुद्ध होती है, क्योंकि एक श्रेणी में एक ही मध्यका होती है।

(3) यह वास्तविक होती है, क्योंकि यह श्रेणी समूह के मध्य पद का मूल्य है।

(4) मध्यका को ग्राफ, बिन्दुरेखीय चित्रों (आलेखों) अथवा चित्रों द्वारा स्पष्टतया प्रदर्शित किया जा सकता है।

(5) प्राय: असाधारण तथ्यों का इस पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है।

(6) सामान्य व्यक्ति भी इसे सरलता से समझ सकते हैं।

(7) इसकी सहायता से गुणात्मक तथ्यों; जैसे स्वास्थ्य, निपुणता, क्षमता, ईमानदारी आदि में औसत वृद्धि भी निकाली जा सकती है।

(8) मध्यका पर सीमान्त पदों का कोई प्रभाव नहीं पड़ता है।

मध्यका के अवगुण
(Demerits of Median)

मध्यका के मुख्य अवगुण अथवा सीमाएँ निम्नलिखित हैं—

(1) मध्यका श्रेणी के सभी मूल्यों पर आधारित नहीं होती है।

(2) सरल गणितीय सूत्र से मध्यका का अनुमान नहीं लगाया जा सकता है।

(3) यदि पदों के विस्तार में असाधारण भिन्नता है, तो यह भ्रामक हो सकती है।

(4) इसका निर्धारण करने के लिए श्रेणी के सभी पदों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करना पड़ता है।

(5) इकाइयों की संख्या में वृद्धि कर देने से इसका मूल्य परिवर्तित हो जाता है।

(6) मध्यका बीजगणितीय प्रयोग के लिए अधिक उपयोगी नहीं है।

(7) मध्यका को दो पदों की संख्या या आवृत्तियों की कुल संख्या से गुणा करने पर मूल्यों का कुल योग प्राप्त नहीं होता है।

(8) जिस श्रेणी में चरम पदों को महत्त्व देना है वहाँ मध्यका का प्रयोग नहीं किया जा सकता है।

मध्यका निकालने की विधि
(Calculation of Median)

मध्यका निकालने की विधि भी इस बात पर निर्भर करती है कि समंक श्रेणी किस प्रकार की है। व्यक्तिगत श्रेणी, खण्डित श्रेणी तथा सतत श्रेणी में मध्यका को निम्नलिखित विधियों द्वारा निकाला जा सकता है—

(1) व्यक्तिगत श्रेणी में मध्यका निकालना
(Calculation of Median in Individual Series)

इस श्रेणी में मध्यका निकालना अत्यन्त सरल है। व्यक्तिगत श्रेणी के पदों को पहले आरोही अथवा अवरोही क्रम में व्यवस्थित किया जाता है तथा फिर निम्नांकित सूत्र द्वारा मध्यका मूल्य निकाला जा सकता है—

$$\boxed{\text{mdn अथवा } \dot{x} = \text{size of } \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\text{th}} \text{ item}}$$

जहाँ, mdn या $\dot{x}$ या M = मध्यका,

n = पदों की संख्या

नोट—यह सूत्र तब प्रयुक्त करना चाहिए जब पदों की संख्या विषम (Odd) हो। उदाहरण 9 तथा 10 द्वारा इसे स्पष्ट किया जा सकता है।

उदाहरण 9—छात्रों के कुल 100 अंकों में प्राप्तांक क्रमश: 54, 36, 77, 31, 48, 67, 25, 80 तथा 45 हैं। मध्यका ज्ञात कीजिए।

हल : मध्यका निकालने के लिए पहले पदों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करना होगा—

25, 31, 36, 45, 48, 54, 67, 77, 80.

यहाँ पदों की कुल संख्या 9 है।

सूत्र, $$\dot{x} = \text{size of } \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\text{th}} \text{ item}$$

$$\dot{x} \quad \frac{9 \quad 1}{2} \text{ वाँ पद}$$

$$\dot{x} \quad \frac{10}{2} \text{ वाँ पद}$$

$$\dot{x} \quad 5 \text{वाँ पद}$$

$$\dot{x} \quad 48 \text{ अंक}$$

उत्तर

उदाहरण 10—बच्चों की सेमी में लम्बाई क्रमशः 65, 62, 68, 59, 65, 58, 59, 63, 56 तथा 66 है। मध्यका ज्ञात कीजिए।

हल : मध्यका निकालने के लिए पहले पदों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करना होगा—

56, 58, 59, 59, 62, 63, 65, 65, 66, 68.

यहाँ पदों की कुल संख्या 10 है।

सूत्र $\dot{x} \quad \text{size of } \frac{n \quad 1}{2}^{\text{th}} \text{ item}$

$\dot{x} \quad \frac{10 \quad 1}{2}$ वाँ पद

$\dot{x} \quad 5 \; 5$वाँ पद

$\dot{x}$ अर्थात् 5वें तथा 6वें पद के बीच का मूल्य

$\dot{x}$ 62 तथा 63 के बीच का मूल्य

$\dot{x} \quad \frac{62 \quad 63}{2} \quad 62 \; 5$ सेमी

उत्तर

नोट—यदि पदों की संख्या सम (Even) है तो $\frac{n \quad 1}{2}$ वाँ पद वाला सूत्र न लगा कर, निम्नांकित सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$\boxed{\dot{x} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{N}{2} \text{ वे तथा } \quad \frac{n}{2} \quad 1 \quad \text{ वें पद के मूल्यों का योग}}$$

उपर्युक्त उदाहरण में $\frac{n}{2}$ मूल्य 62 है जबकि $\frac{n}{2} \quad 1$ मूल्य 63 है।

अत: $\dot{x} \quad \frac{1}{2}[62 \quad 63]$

$62 \; 5$ सेमी

उत्तर

(2) खण्डित श्रेणी में मध्यका निकालना
(Calculation of Median in Discrete Series)

खण्डित श्रेणी में मध्यका निकालने के लिए पहले आवृत्तियों को संचयी आवृत्तियों में परिवर्तित करना पड़ता है। फिर निम्नांकित सूत्र द्वारा मध्यका निकाला जा सकता है—

$$\boxed{\dot{x} \quad \text{size of } \frac{n \quad 1}{2}^{\text{th}} \text{ item}}$$

इसे उदाहरण 11 द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है।

उदाहरण 11—निम्नांकित वितरण की मध्यका ज्ञात कीजिए—

x	4	5	6	7	8	9	10
f	2	4	5	5	3	2	1

हल : पहले हमें आवृत्तियों को संचयी आवृत्तियों में परिवर्तित करना होगा—

x	*f*	*c.f.*
4	2	2
5	4	6
6	5	11
7	5	16
8	3	19
9	2	21
10	1	22

इस उदाहरण में पदों की कुल संख्या या संचयी आवृत्ति (c.f.) 22 है। इसमें मध्यका अग्रलिखित सूत्र द्वारा ज्ञात की जाएगी—

सूत्र $$\dot{x} \quad \text{size of} \quad \frac{n \quad 1}{2}^{\text{th}} \quad \text{item}$$

$$\dot{x} \quad \text{size of} \quad \frac{22 \quad 1}{2}^{\text{th}} \quad \text{item}$$

11 5वाँ पद 16 संचयी आवृत्ति वाले वर्ग में स्थित है जिसका पद मूल्य 7 है। इसलिए मध्यका 7 होगी।

नोट—यदि श्रेणी के पदों की संख्या अर्थात् संचयी आवृत्ति (c.f.) सम (Even) न होकर विषम (Odd) है, तो भी मध्य पद $\frac{N \quad 1}{2}$ का पद-मूल्य मध्यका होगा। उदाहरणार्थ—

x	*f*	*c.f.*
21	2	2
22	3	5
23	4	9
24	7	16
25	6	22
26	9	31
27	3	34
28	1	35

यहाँ मध्य पद $\frac{n \quad 1}{2}$ वाँ पद होगा

अर्थात् $\frac{35 \quad 1}{2}$ 18 वाँ पद है।

18वाँ पद 22 संचयी आवृत्ति वाले वर्ग में स्थित है, अत: मध्यका 18वें पद का पद मूल्य अर्थात् 25 है।

(3) सतत अथवा अखण्डित श्रेणी में मध्यका निकालना
(Calculation of Median in Continuous Series)

अखण्डित श्रेणी में भी मध्यका निकालने की विधि खण्डित श्रेणी की तरह ही है, केवल वर्ग विस्तार होने के कारण आन्तरगणन (Interpolation) की अतिरिक्त क्रिया करनी पड़ती है। साथ ही, इसमें मध्य वर्गान्तर बिन्दु 'm' का निर्धारण $\frac{n}{2}$ वाँ पद है, न कि $\frac{n+1}{2}$ वाँ पद। मध्य वर्गान्तर (m) मालूम हो जाने के पश्चात् अखण्डित श्रेणी में मध्यका के लिए निम्नांकित सूत्र का प्रयोग करना पड़ता है—

$$\boxed{\dot{x} \quad l_1 \quad \frac{l_2 \quad l_1}{f}(m \quad c)}$$

अथवा

$$\boxed{\dot{x} \quad l_1 \quad \frac{i}{f} \; \frac{n}{2} \quad c}$$

अथवा

$$\boxed{\dot{x} \quad L \quad \frac{n/2 \quad pcf}{f} \quad i}$$

जहाँ, $\dot{x}$ मध्यका

L *or* l_1 मध्यका वर्ग विस्तार की निम्न सीमा (Lower limit of median class interval),

l_2 मध्यका वर्ग विस्तार की उच्च सीमा (Upper limit of median class interval),

f मध्यका वर्ग विस्तार की आवृत्ति (Frequency of the median class),

m मध्यका संख्या $\frac{M}{2}$ वाँ पद,

c *or* Pcf मध्यका वर्ग से ठीक पहले वर्ग की संचयी आवृत्ति (Cumulative frequency of the previous group of median class), तथा

i मध्यका वर्ग विस्तार का परिमाण (Magnitude of median class interval) या वर्गान्तर।

इसे उदाहरण 12 द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है।

उदाहरण 12—निम्नांकित तालिका में 80 छात्रों के प्राप्तांक दिए हुए हैं, मध्यका ज्ञात कीजिए—

प्राप्तांक समूह	आवृत्ति
0—10	3
10—20	9
20—30	15
30—40	30
40—50	18
50—60	5

हल : प्रश्न में दी गई तालिका को पहले संचयी आवृत्ति तालिका में परिवर्तित करना होगा—

प्राप्तांक समूह (वर्गान्तर)	आवृत्ति (f)	संचयी आवृत्ति (c.f.)
0—10	3	3
10—20	9	12
20—30	15	27
30—40	30	57
40—50	18	75
50—60	5	80

$$n \quad 80$$

$$\frac{n}{2} = 40$$

40वाँ पद मध्यका है तथा 30-40 वह वर्ग है जिसमें मध्यका पद स्थित है।

सूत्र, $$\dot{x} \quad l_1 \quad \frac{i}{f} \quad \frac{n}{2} \quad c$$

$$\dot{x} \quad 30 \quad \frac{10}{30}(40 \quad 27)$$

$$\dot{x} \quad 30 \quad \frac{10}{30}(13)$$

$$\dot{x} \quad 30 \quad \frac{13}{3}$$

$$\dot{x} \quad 30 \quad 4 \;\; 33$$

$$\dot{x} \quad 34 \;\; 33$$

अत: छात्रों के प्राप्तांकों की मध्यका 34 33 है। **उत्तर**

यदि समावेशी वर्गान्तर (Inclusive class interval) श्रेणी में मध्यका ज्ञात करनी है तो पहले समंक को अपवर्जी वर्गान्तर (Exclusive class interval) श्रेणी में परिवर्तित करना पड़ता है। शेष प्रक्रिया एवं सूत्र एक समान ही हैं।

भूयिष्ठक
[MODE]

भूयिष्ठक या बहुलक वह मूल्य है जिसका प्रयोग समंक माला में सबसे अधिक बार होता है अथवा जिसकी आवृत्ति सबसे अधिक होती है। इसलिए इसे **बहुलक** भी कहा जाता है। सरल शब्दों में, इसका अर्थ अधिकतम प्रयोग अर्थात् सर्वाधिक फैशन अथवा रिवाज से है। **क्राक्सटन** एवं **काउडन** (Croxton and Cowden) के अनुसार, ''किसी वितरण का वह मूल्य भूयिष्ठक कहलाता है जिसके चारों ओर श्रेणी की इकाइयाँ अधिक-से-अधिक केन्द्रित होती हैं।''

बोडिंगटन (Boddington) के अनुसार, ''भूयिष्ठक को महत्त्वपूर्ण प्रकार, रूप या पद का आकार या सबसे अधिक घनत्व की स्थिति के रूप में परिभाषित किया जा सकता है।'' इसी प्रकार, **जिजेक** (Zizek) के अनुसार, ''भूयिष्ठक वह मूल्य है, जो पदों की श्रेणी अथवा समूह में सबसे अधिक बार आता है तथा जिसके चारों ओर अधिक घनत्व के पदों का वितरण रहता है।'' इन परिभाषाओं से यह स्पष्ट हो जाता है कि भूयिष्ठक सर्वाधिक घनत्व की स्थिति, सर्वाधिक बार प्रयोग किए जाने वाले पद का मूल्य, मूल्यों के अधिकतम केन्द्रीकरण का बिन्दु है। भूयिष्ठक के चारों ओर सर्वाधिक पदों का जमाव होता है।

भूयिष्ठक की मुख्य विशेषताएँ
(Characteristics of Mode)

भूयिष्ठक की प्रमुख विशेषताएँ अग्रलिखित हैं—

(1) भूयिष्ठक श्रेणी के उच्चतम तथा निम्नतम मूल्य से बहुत कम प्रभावित होता है, क्योंकि यह सभी पदों पर आधारित होता है।

(2) वह आवृत्ति पर निर्भर है अर्थात् जिस मूल्य की आवृत्ति जितनी अधिक होगी वही भूयिष्ठक कहा जाएगा।

(3) सर्वाधिक घनत्व का बिन्दु होने के कारण श्रेणी में इसका अनुमान सरलता से लगाया जा सकता है।

(4) यह श्रेणी का सबसे अधिक मूल्य वाला पद नहीं है अपितु वह पद मूल्य है जिसकी आवृत्ति सबसे अधिक होती है।

भूयिष्ठक के गुण
(Merits of Mode)

भूयिष्ठक के प्रमुख गुण निम्नलिखित हैं—

(1) भूयिष्ठक बड़ी सरलता से, सामान्यत: निरीक्षण-मात्र से समझा जा सकता है।

(2) इसके निर्धारण के लिए सभी पदों के मूल्यों का पता होना जरूरी नहीं है। केवल भूयिष्ठक वर्ग के आगे-पीछे वाले वर्गों की आवृत्तियों का पता होना जरूरी है।

(3) इस पर आवश्यक तथ्यों एवं असामान्य पदों का कोई प्रभाव नहीं पड़ता है।

(4) इसका प्रयोग विस्तृत क्षेत्र में किया जा सकता है।

(5) इसे रेखाचित्र द्वारा समझा जा सकता है।

(6) यह लोकप्रियता, फैशन इत्यादि का अध्ययन करने में अति उपयोगी है।

(7) यह सर्वाधिक प्रतिनिधित्व मूल्य है।

भूयिष्ठक के अवगुण
(Demerits of Mode)

भूयिष्ठक के प्रमुख अवगुण निम्नलिखित हैं—

(1) व्यवहार में इसका निश्चित अनुमान लगाना सम्भव नहीं है।

(2) इसकी गणना के लिए अपनाई जाने वाली विधि अत्यन्त जटिल है।

(3) यह सम्पूर्ण पद समूह के थोड़े-से पदों का ही प्रतिनिधित्व करता है।

(4) यदि वर्गान्तर क्रमबद्ध न हो तो प्राय: परिणाम भ्रामक ही निकलता है।

(5) इसमें सीमान्त पदों का कोई महत्त्व नहीं होता है।

(6) यह बीजगणितीय विधियों के योग्य नहीं है।

(7) कभी-कभी एक ही श्रेणी में दो भूयिष्ठक पाए जाते है। ऐसी परिस्थितियों में वास्तविक भूयिष्ठक का पता लगाना कठिन हो जाता है।

(8) भूयिष्ठक को पदों की संख्या से गुणा करने पर भी पदों के कुल मूल्य का योग प्राप्त नहीं होता है।

भूयिष्ठक निकालने की विधि
(Calculation of Mode)

व्यक्तिगत श्रेणी, खण्डित श्रेणी, अखण्डित श्रेणी तथा संचयी आवृत्ति श्रेणियों में भूयिष्ठक निकालने के सूत्र एवं विधियाँ निम्नलिखित हैं—

(1) व्यक्तिगत श्रेणी में भूयिष्ठक निकालना
(Calculation of Mode in Individual Series)

व्यक्तिगत श्रेणी अथवा सरल श्रेणी में भूयिष्ठक निकालना एक सरल कार्य है क्योंकि इसे सरल निरीक्षण द्वारा ही ज्ञात किया जा सकता है। जिस पद की आवृत्ति सबसे अधिक है अर्थात् जो संख्या सर्वाधिक बार दोहराई जाती है, वही संख्या भूयिष्ठक है। यदि पदों की संख्या अधिक है तो इसके लिए पहले पदों को चढ़ते (आरोही) क्रम में लगाना पड़ता है तथा फिर उस पद मूल्य का पता लगाना होता है जिसकी पुनरावृत्ति सबसे अधिक बार होती है।

इसे उदाहरण 13 द्वारा समझा जा सकता है।

उदाहरण 13—बी० ए० के 15 छात्रों के समाजशास्त्र के पेपर में प्राप्तांक निम्नलिखित हैं—

18, 15, 20, 22, 21, 29, 31, 15, 13, 22, 12, 21, 22, 19, 22.

इन समंकों से बहुलक (भूयिष्ठक) की गणना कीजिए।

हल : भूयिष्ठक निकालने के लिए हमें पहले अंकों को वृद्धिमान क्रम के अनुसार लगाना होगा—

$$12, 13, \frac{15, 15,}{2}\ 18, 19, 20, \frac{21, 21,}{2}\ \frac{22, 22, 22, 22,}{4}\ 29, 31.$$

अंकों को क्रमबद्ध करने के पश्चात् यह स्पष्ट पता चल जाता है कि 22 अंक सबसे अधिक बार अर्थात् 4 बार दोहराया गया है। अत: 22 ही भूयिष्ठक है। **उत्तर**

(2) खण्डित श्रेणी में भूयिष्ठक निकालना
(Calculation of Mode in Discrete Series)

खण्डित श्रेणी में भूयिष्ठक दो प्रकार से निकाला जा सकता है—

(i) निरीक्षण द्वारा (By observation)—जैसा कि सरल श्रेणी के अन्तर्गत किया जाता है जिस श्रेणी की आवृत्ति सर्वाधिक होती है वही भूयिष्ठक है। जैसे—

आय (रुपयों में)	व्यक्तियों की संख्या (आवृत्ति)
90	5
91	7
92	3
93	10
94	2
95	1
96	6

उपर्युक्त श्रेणी का निरीक्षण करके यह स्पष्ट ज्ञात हो जाता है कि 93 रुपये ऐसी आय है जिसकी आवृत्ति सबसे अधिक है। अत: 93 ही भूयिष्ठक हुआ।

(ii) समूहीकरण सारणी द्वारा (By grouping table)—इसमें पद मूल्यों तथा आवृत्तियों को व्यवस्थित करके समूहीकरण सारणी बनाई जाती है, फिर विश्लेषण सारणी बनाई जाती है और बाद में अधिकतम आवृत्ति वाले पद के मूल्य के द्वारा भूयिष्ठक ज्ञात किया जाता है। समूहीकरण के लिए पहले आवृत्तियों के खाने के बाद एक दूसरा खाना या क्रम माला बनाई जाती हैं जिसमें आवृत्तियों की क्रम माला के दो-दो जोड़े प्रारम्भिक आवृत्ति संख्या से बना लिए जाते हैं। फिर एक तीसरी क्रम माला बनाई जाती है जिसमें आवृत्तियों की क्रम माला की पहली आवृत्ति को छोड़कर आगे वाली आवृत्तियों के दो-दो जोड़े बनाए जाते हैं, फिर चौथी क्रम माला बनाई जाती है जिसमें आवृत्तियों की क्रम माला की तीन-तीन आवृत्तियों के जोड़ लिखे जाते हैं। इसके पश्चात् पाँचवीं क्रम माला बनाई जाती है जिसमें आवृत्तियों की क्रम माला की पहली आवृत्ति छोड़कर शेष तीन-तीन आवृत्तियों का जोड़ लिखा जाता है। फिर छठी क्रम माला बनाई जाती है जिसमें आवृत्तियों की क्रम माला में प्रथम दो आवृत्तियों को छोड़कर अगली आवृत्तियों में हर तीन-तीन आवृत्तियों को जोड़ लिया जाता है। इस प्रकार, समूहीकरण सारणी एक-एक, दो-दो तथा तीन-तीन आवृत्ति संख्या को जोड़कर उनके योग से तैयार की जाती है और इसके द्वारा एक, दो और तीन आवृत्तियों वाले समूह पृथक्-पृथक् बन जाते हैं।

समूहीकरण सारणी के पश्चात् एक विश्लेषण सारणी बनाई जाती है जिसका आधार विभिन्न क्रम मालाओं (खानों) में रेखांकित या मोटी (Bold) की गई संख्याएँ होती हैं।

इसे हम उदाहरण 14 द्वारा स्पष्ट कर सकते हैं—

उदाहरण 14—निम्नलिखित वितरण में भूयिष्ठक ज्ञात कीजिए—

हल : इसका भूयिष्ठक समूहीकरण सारणी द्वारा ज्ञात किया जा सकता है। पहले निम्नवर्णित प्रकार से समूहीकरण सारणी बनानी होगी—

हल : इसका भूयिष्ठक समूहीकरण सारणी द्वारा ज्ञात किया जा सकता है। पहले अग्रवर्णित प्रकार से समूहीकरण सारणी बनानी होगी—

x	**आवृत्ति**					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
2	3	11		21		
3	8		18		30	
4	10	22				38
5	12		28	42		
6	16	30			40	
7	14		24			32
8	10	18		35		
9	8		25		30	
10	17	22				25
11	5		8	10		
12	3	5				
13	2					

विश्लेषण सारणी

खाना संख्या (कॉलम)	**अधिकतम आवृत्ति वाले पदों का मूल्य**					
1	—	—	—	—	—	10
2	—	—	6	7	—	—
3	—	5	6	—	—	—
4	—	5	6	7	—	—
5	—	—	6	7	8	—
6	4	5	6	—	—	—
योग	**1**	**3**	**5**	**3**	**1**	**1**

अधिकतम आवृत्तियों 30, 28, 42, 40 तथा 38 में 4वाँ पद 1 बार, 5वाँ पद 3 बार, 6वाँ 5 बार, 7वाँ 3 बार तथा 8वाँ एवं 10वाँ पद एक-एक बार आते हैं। अत: 6वाँ पद सर्वाधिक आवृत्ति वाला पद है और इसलिए भूयिष्ठक है।

(3) अखण्डित या सतत श्रेणी में भूयिष्ठक निकालना
(Calculation of Mode in Continuous Series)

अखण्डित श्रेणी में सर्वप्रथम सरल निरीक्षण (सबसे अधिक आवृत्ति वाला वर्ग) अथवा समूहीकरण सारणी एवं विश्लेषण सारणी द्वारा यह ज्ञात किया जाता है कि भूयिष्ठक किस वर्ग में स्थित है। फिर निश्चित भूयिष्ठक निकालने के लिए निम्नांकित सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$\text{भूयिष्ठक } \hat{X}(Z) \quad L \quad \frac{d_1}{d_1 \quad d_2} \quad i$$

जहाँ, $\hat{X}$ या Z भूयिष्ठक (Mode),

L भूयिष्ठक वर्ग की निम्न सीमा (Lower limit of modal class),

d_1 भूयिष्ठक वर्ग और उससे पहले वर्ग की बारम्बारताओं (आवृत्तियों) का अन्तर (Difference between the frequency of modal class and the frequency of preceding class),

d_2 भूयिष्ठक वर्ग और उसके बाद वाले वर्ग की बारम्बारताओं (आवृत्तियों) का अन्तर (Difference between the frequency of modal class and the frequency of succeeding class), तथा

i वर्गान्तर (Class interval of size of the modal class)।

इसे उदाहरण 15 तथा 16 द्वारा स्पष्ट समझा जा सकता है।

उदाहरण 15—निम्नलिखित तालिका में 76 छात्रों के प्राप्तांक अंक-समूहों के आधार पर दिए गए हैं। भूयिष्ठक ज्ञात कीजिए—

प्राप्तांक समूह	0—10	10—20	20—30	30—40	40—50
आवृत्ति	4	8	12	32	20

हल : आवृत्ति वितरण के सरल निरीक्षण से यह पता चल जाता है कि भूयिष्ठक 30å40 के वर्गान्तर वाले समूह में स्थित है। अतः समूहीकरण तालिका एवं विश्लेषण तालिका बनाने की आवश्यकता नहीं है।

सूत्र, $$Z \quad L \quad \frac{d_1}{d_1 \quad d_2} \quad i$$

$$Z = 30 + \frac{(32 - 12)}{(32 - 12) + (32 - 20)} \quad i$$

$$Z = 30 + \frac{20}{20 + 12} \quad 10$$

$$Z = 30 + \frac{20}{32} \quad 10$$

$$Z = 30 + 6 \quad 25$$

$$Z = 36 \quad 25 \text{ अंक}$$

उत्तर

उदाहरण 16—निम्नलिखित आवृत्ति का भूयिष्ठक ज्ञात कीजिए—

प्राप्तांक समूह	20–25	25–30	30–35	35–40	40–45	45–50	50–55	55–60
f	50	70	80	160	160	130	70	30

हल : पहले समूहीकरण सारणी एवं विश्लेषण सारणी का निर्माण करना होगा, क्योंकि दो वर्गों की बारम्बारता (आवृत्ति) सबसे अधिक है और देखकर भूयिष्ठक वर्ग का पता नहीं लग सकता। इसे अग्रनिर्मित समूहीकरण सारणी में दर्शाया गया है—

समूहीकरण सारणी

वर्गान्तर	आवृत्ति					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
20—25	50	120				
25—30	70		150	200		
30—35	80	240			310	
35—40	160		320			400
40—45	160	290		450		
45—50	130		200		360	
50—55	70	100				230
55—60	30					

विश्लेषण सारणी

खाना संख्या (कॉलम)	अधिकतम आवृत्ति वाले पदों का मूल्य				
1	—	35—40	40—45	—	—
2	—	—	40—45	45—50	—
3	—	35—40	40—45	—	—
4	—	35—40	40—45	45—50	—
5	—	—	40—45	45—50	50—55
6	30—35	35—40	40—45	—	—
योग	**1**	**4**	**6**	**3**	**1**

विश्लेषण तालिका से यह पूर्णत: स्पष्ट हो जाता है कि भूयिष्ठक 40-45 वर्गान्तर वाले वर्ग समूह में स्थित है।

सूत्र, $\boxed{Z \quad L \quad \frac{f_2}{f_0 \quad f_2} \quad i}$

जहाँ, f_0 भूयिष्ठक वर्ग के बाद के वर्ग की आवृत्ति = 160

f_2 भूयिष्ठक वर्ग के पहले वर्ग की आवृत्ति = 130

i भूयिष्ठक वर्ग का वर्गान्तर = 5

L भूयिष्ठक वर्ग की निम्न सीमा = 40

अत:

$$Z = 40 + \frac{130}{160 + 130} \quad 5$$

$$Z = 40 + \frac{650}{290}$$

$$Z = 40 + 2 \quad 24$$

$Z = 42 \quad 24$ अंक **उत्तर**

माध्य, मध्यका और भूयिष्ठक में सम्बन्ध
(Relationship among Mean, Median and Mode)

यदि किसी माप के वितरण में माध्य, मध्यका और भूयिष्ठक एक जैसे आते हैं, तो ऐसे वितरण को हम सममिति वितरण (Symmetrical distribution) कहते हैं और यदि इनका वितरण असमान (Non symmetrical) होता है, तो माध्य, मध्यका और भूयिष्ठक में परस्पर एक निश्चित एवं आश्चर्यजनक सम्बन्ध पाया जाता है। वस्तुत: ऐसे माप के वितरणों में माध्य और मध्यका के बीच की दूरी; माध्य और भूयिष्ठक के बीच की दूरी की एक-तिहाई होती है।

इस सम्बन्ध को निम्नलिखित सूत्र द्वारा अभिव्यक्त किया जा सकता है—

माध्य मध्यका $\frac{1}{3}$ (माध्य भूयिष्ठक)

अथवा, भूयिष्ठक 3 मध्यका 2 माध्य

अथवा, $Z \quad 3M \quad 2\overline{X}$

अथवा, $M \quad \frac{1}{3}(Z \quad 2\overline{X})$

अथवा, $\overline{X} \quad \frac{1}{2}(3M \quad Z)$

इसे उदाहरण 17 द्वारा समझा जा सकता है।

उदाहरण 17—यदि किसी वितरण का माध्य और मध्यका क्रमश: 35·4 और 34·3 हैं, तो भूयिष्ठक का मान ज्ञात कीजिए।

हल : सूत्र, भूयिष्ठक 3 मध्यका 2 माध्य

अत: $Z \quad 3M \quad 2\overline{X}$

$Z \quad 3 \quad 34\ 3 \quad 2 \quad 35\ 4$

$Z \quad 102\ 9 \quad 70\ 8$

$Z \quad 32\ 1$

अत: भूयिष्ठक 32 1 है। **उत्तर**

मानक या प्रमाप विचलन
[STANDARD DEVIATION]

प्रमाप विचलन अपकिरण के मापों में सबसे अधिक प्रयुक्त होने वाला एक वैज्ञानिक एवं आदर्श माप है जिसमें माध्य विचलन का प्रमुख दोष—माध्य विचलन में सभी विचलनों को धनात्मक मान लिया जाता है—दूर हो जाता है। इसे **द्वितीय घात का अपकिरण** (Second moment of dispersion) भी कहा जाता है। इसे ग्रीक वर्णमाला के अक्षर (छोटा सिगमा) द्वारा संकेतित किया जाता है।

मानक या प्रमाप विचलन का अर्थ
(Meaning of Standard Deviation)

प्रमाप विचलन का अभिप्राय उस माप से होता है जोकि पदों के समान्तर माध्य से लिए गए विचलनों के वर्गों के समान्तर माध्य का वर्गमूल है अर्थात् इसमें समान्तर माध्य से विचलन लेकर उनके धनात्मक ( ) तथा ऋणात्मक ( ) बीजगणितीय चिह्नों को ध्यान में रखते हुए उनका वर्ग लिया जाता है। वर्ग लेने के कारण धनात्मक ( ) तथा ऋणात्मक ( ) चिह्न स्वत: समाप्त हो जाते हैं। इन वर्गों का योग करके उसका समान्तर माध्य और फिर उसका वर्गमूल निकाला जाता है। इस माप का प्रयोग सर्वप्रथम **कार्ल पियर्सन** (Karl Pearson) नामक विद्वान् ने किया था।

प्रमाप विचलन की विशेषताएँ
(Characteristics of Standard Deviation)

प्रमाप विचलन की प्रमुख विशेषताएँ अग्रांकित हैं—

(1) प्रमाप विचलन में विचलन सदैव समान्तर माध्य से ही लिया जाता है।

(2) इसमें बीजगणितीय चिह्नों ( ) तथा ( ) की उपेक्षा नहीं की जाती अपितु विचलनों के वर्ग निकालने पर वे स्वयं ही धनात्मक हो जाते हैं।

(3) विचलनों के वर्गों के योग को पदों की संख्या से भाग दिया जाता है तथा प्राप्त मूल्य का वर्ग निकाला जाता है। इसी को प्रमाप विचलन कहते हैं।

प्रमाप विचलन को निम्नांकित सूत्र द्वारा व्यक्त किया जा सकता है—

$$\boxed{=\sqrt{\frac{d^2}{n}}} \quad \text{अथवा} \quad \boxed{=\sqrt{\frac{(x - \bar{x})^2}{n}}}$$

प्रमाप विचलन को निकालने की विधि

(Method of Computing Standard Deviation)

प्रमाप विचलन निकालने की विधि आँकड़ों की श्रेणी पर निर्भर करती है। इसे विभिन्न श्रेणियों में निम्न प्रकार से ज्ञात किया जा सकता है—

(अ) व्यक्तिगत श्रेणी में प्रमाप विचलन निकालना

(Calculation of Standard Deviation in Individual Series)

व्यक्तिगत श्रेणी में प्रमाप विचलन दो रीतियों से निकाला जा सकता है—प्रत्यक्ष विधि (Direct Method) द्वारा तथा लघु या परोक्ष विधि (Short-cut Method) द्वारा।

(क) प्रत्यक्ष विधि (Direct Method)—इस विधि द्वारा प्रमाप विचलन अग्र प्रकार से ज्ञात किया जा सकता है—

(1) सबसे पहले व्यक्तिगत श्रेणी का समान्तर माध्य (a) ज्ञात किया जाता है।

(2) समान्तर माध्य से श्रेणी के प्रत्येक पद का विचलन (d) निकाला जाता है $(d \quad m \quad n)$ अथवा $(x \quad \bar{x})$।

(3) इन विचलनों के अलग-अलग वर्ग (d^2) ज्ञात करके, वर्गों का योग (d^2) ज्ञात किया जाता है।

(4) प्राप्त विचलन मापांक (भजनफल) का वर्गमूल $\sqrt{\frac{d^2}{n}}$ निकालने से श्रेणी का प्रमाप विचलन ज्ञात हो जाता है।

इसे निम्नांकित सूत्र द्वारा व्यक्त किया जा सकता है—

$$=\sqrt{\frac{d^2}{n}}$$

(ख) लघु विधि (Short-cut method)—प्राय: समान्तर माध्य पूर्णांक नहीं होता अत: विचलन भी पूर्णांक नहीं होंगे। इससे वर्ग निकालने में कठिनाई का सामना करना पड़ सकता है। इस कठिनाई से बचने के लिए लघु विधि अपनाई जाती है। इसके द्वारा व्यक्तिगत श्रेणी का प्रमाप निम्न प्रकार से निकाला जा सकता है—

(1) श्रेणी में दिए गए मूल्यों में से किसी एक को कल्पित माध्य (Assumed mean) अर्थात् (x) मान लिया जाता है।

(2) कल्पित माध्य से श्रेणी के प्रत्येक पद का विचलन (dx) निकाला जाता है।

(3) प्रत्येक विचलन का वर्ग (dx^2) निकाला जाता है।

(4) सभी विचलन वर्गों के योग को (dx^2) ज्ञात किया जाता है।

(5) सभी विचलन वर्गों के योग का पदों की संख्या (n) से भाग दिया जाता है।

(6) प्राप्त विचलन मापांक (भजनफल) अर्थात् $\frac{dx^2}{n}$ से वास्तविक व अनुमानित (कल्पित) समान्तर माध्य के अन्तर $(a \quad x)$ को घटा दिया जाता है।

(7) जो शेष बचे उसका वर्गमूल निकाला जाता है। यही प्रमाप विचलन होता है।

इसे निम्नलिखित सूत्रों द्वारा व्यक्त किया जा सकता है—

(1) $\sqrt{\frac{dx^2}{n} - \frac{dx}{n}^{2}}$ अथवा

(2) $\sqrt{\frac{dx^2}{n} - (a - x)^2}$ अथवा

(3) $\sqrt{\frac{dx^2 - n(a - x)^2}{n}}$ अथवा

(4) $\frac{1}{n}\sqrt{[n\ dx^2 - (\ dx)^2]}$

जहाँ, dx^2 कल्पित माध्य के विचलनों के वर्गों का योग,

n श्रेणी के पदों की संख्या,

a वास्तविक समान्तर माध्य तथा

x कल्पित माध्य।

तुलना करने के लिए हमें प्रमाप विचलन गुणांक (Coefficient of standard deviation) निकालना पड़ता है। प्रमाप विचलन निरपेक्ष माप है, जबकि इसे प्रमाप विचलन के गुणांक द्वारा सापेक्ष (Relative) रूप में परिवर्तित किया जाता है।

इसे निम्नांकित सूत्र द्वारा व्यक्त किया जाता है—

$$\text{Coefficient of S. D.} = \frac{\quad}{a}$$

व्यक्तिगत श्रेणी में प्रमाप विचलन तथा इसके गुणांक को निकालने की विधि (प्रत्यक्ष तथा लघु विधि) को उदाहरण 4 द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है।

उदाहरण 4—निम्नलिखित पदों का प्रमाप विचलन तथा प्रमाप विचलन गुणांक ज्ञात कीजिए—

2, 3, 5, 6, 8, 9.

हल :

x	**d (deviation from mean)**	**d^2**
2	3 5	12 25
3	2 5	6 25
5	0 5	0 25
6	0 5	0 25
8	2 5	6 25
9	3 5	12 25
x **33**		***d^2*** **37 5**

अत: $\text{A. M.}(a) = \frac{x}{n} = \frac{33}{6} = 5\ \ 5$

(i) प्रत्यक्ष विधि द्वारा प्रमाप विचलन

$$= \sqrt{\frac{d^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{37\ \ 5}{6}}$$

$$= \sqrt{6\ \ 25}$$

$$2\ 5$$ उत्तर

अत: Coefficient of S. D. $= \frac{}{a} = \frac{2\ \ 5}{5\ \ 5} = 0\ \ \ 454$ उत्तर

(ii) लघु विधि द्वारा प्रमाप विचलन :

मान लीजिए कल्पित माध्य 5

x	dx [d from x (= 5)]	d^2
2	3	9
3	3	4
5	0	0
6	1	1
8	3	9
9	4	16
***n* 6**	***dx* 3**	***dx*² 39**

$$= \sqrt{\frac{dx^2}{n} - \frac{dx}{n}^{\ 2}}$$

$$= \sqrt{\frac{39}{6} - \frac{3}{6}^{\ 2}}$$

$$= \sqrt{\frac{39}{6} - \frac{1}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{150}{24}}$$

$$= \sqrt{6\ \ 25}$$

$$2\ 5$$ उत्तर

(ब) खण्डित तथा अखण्डित श्रेणी में प्रमाप विचलन निकालना

(Calculation of Standard Deviation in Discrete and Continuous Series)

खण्डित तथा अखण्डित श्रेणियों में प्रमाप विचलन की रीति एक ही है (केवल अखण्डित श्रेणी को पहले खण्डित श्रेणी में परिवर्तित करके मध्य बिन्दु निकाल लिए जाते हैं)। इसे अग्र प्रकार से समझा जा सकता है—

(क) प्रत्यक्ष विधि (Direct Method) :

(1) सबसे पहले श्रेणी का समान्तर माध्य (a) ज्ञात किया जाता है।

(2) समान्तर माध्य से श्रेणी के प्रत्येक पद का विचलन (d) निकाला जाता है ($d \quad m \quad a$ अथवा $x \quad \bar{x}$)।

(3) इन विचलनों का अलग-अलग वर्ग (d^2) निकाला जाता है।

(4) प्रत्येक विचलन के वर्ग (d^2) को उसके पद की आवृत्ति (f) से गुणा (fd^2) किया जाता है तथा इनका योग (fd^2) ज्ञात कर लिया जाता है।

(5) इस योग (fd^2) को पदों की संख्या (n) से भाग $\frac{fd^2}{n}$ दिया जाता है।

(6) प्राप्त भजनफल $\frac{fd^2}{n}$ का वर्गमूल $\sqrt{\frac{fd^2}{n}}$ निकाला जाता है। इससे प्राप्त फल ही प्रमाप विचलन है।

इसे निम्नांकित सूत्र द्वारा व्यक्त किया जा सकता है—

$$= \sqrt{\frac{fd^2}{n}}$$

(ख) लघु विधि या परोक्ष विधि (Short-cut Method)

(1) श्रेणी में दिए गए मूल्यों में से किसी एक को कल्पित माध्य (Assumed mean या x) मान लिया जाता है।

(2) इस कल्पित माध्य से श्रेणी के प्रत्येक पद का विचलन (dx) ज्ञात किया जाता है।

(3) प्रत्येक विचलन का वर्ग $(dx)^2$ निकाला जाता है।

(4) प्रत्येक ऐसे वर्ग $(dx)^2$ को उस पद की आवृत्ति (f) से गुणा करके इनका योग (fdx^2) निकाला जाता है।

(5) इस योग (fdx^2) को आवृत्तियों के योग (n) से भाग $\frac{fd^2}{n}$ दिया जाता है।

(6) प्राप्त विचलन मापक या भजनफल $\frac{fd^2}{n}$ से वास्तविक व कल्पित समान्तर माध्य के अन्तर $(a \quad x)$ को घटा दिया जाता है।

(7) घटाने पर जो शेष बचे उसका वर्गमूल $\sqrt{\frac{fd}{n} \qquad (a \quad x)}$ निकाला जाता है। यही प्रमाप विचलन होता है।

इसे निम्नांकित सूत्र द्वारा व्यक्त किया जा सकता है—

$$\sqrt{\frac{fd^2}{n} - (a-x)^2}$$

नोट—यह विधि वास्तविक व्यवहार में लघु विधि नहीं कही जा सकती क्योंकि इसमें जब हम वास्तविक समान्तर माध्य ही ज्ञात कर लेते हैं तो कल्पित माध्य से विचलन ज्ञात करने की क्या आवश्यकता है। अत: इस विधि में हम पहले कल्पित माध्य से श्रेणी के प्रत्येक पद का विचलन (dx) ज्ञात करके उसे उस की आवृत्ति (f) से गुणा करके fdx ज्ञात करते हैं। इसका योग fdx निकाला जाता है। इसी प्रकार, fdx^2 निकाला जाता है। इसे निम्न सूत्र द्वारा व्यक्त किया जा सकता है।

$$\sqrt{\frac{fdx^2}{n} - \left(\frac{fdx}{n}\right)^2}$$

लघु विधि में निम्नांकित सूत्रों का प्रयोग करके भी प्रमाप विचलन ज्ञात किया जाता सकता है—

(1) $$\sqrt{\frac{fdx^2 - n\,(a - x)^2}{n}}$$ अथवा

(2) $$\frac{1}{n}\sqrt{n.\ \ fdx^2 - (\ \ fdx)^2}$$

जहाँ, fdx^2 = विचलन वर्गों तथा सम्बन्धित आवृत्तियों के गुणनफलों का योग,

n = श्रेणी के पदों की संख्या,

a = वास्तविक समान्तर माध्य, तथा

x = कल्पित माध्य।

(ग) पद विचलन विधि (Step deviation Method) :

इस विधि द्वारा गणना कार्य और भी सरल हो जाता है। इसमें वास्तविक विचलनों को समापवर्त्य (Common factor) से भाग दे दिया जाता है जिससे विचलनों की संख्याएँ छोटी बन जाती हैं। इसमें विचलनों के स्थान का पद विचलन (Step deviation) प्रयुक्त किए जाते हैं। संख्याएँ छोटी होने के कारण गुणा, भाग, वर्गमूल इत्यादि सरलता से निकाला जा सकता है।

इसका सूत्र निम्नांकित है—

$$= i\sqrt{\frac{dx^2}{n} - \frac{fdx}{n}^{2}}$$

जहाँ, i = समापवर्त्य या समापवर्तक (Common factor),

fdx^2 = विचलन वर्गों तथा सम्बन्धित आवृत्तियों के गुणनफलों का योग,

fdx = विचलनों तथा आवृत्तियों के गुणनफलों का योग, तथा

n = श्रेणी के पदों की संख्या।

इसे निम्नलिखित उदाहरण द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है।

उदाहरण 5—मध्यक की सहायता से निम्नलिखित आँकड़ों का प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए—

रुपये	20	18	16	14	12	10	8	6
आवृत्ति	2	4	9	18	27	25	14	1

हल :

रुपये (x)	**f**	**fx**	**d**	**d^2**	**$f.d^2$**
20	2	40	8	64	128
18	4	72	6	36	144
16	9	144	4	16	144
14	18	252	2	4	72
12	27	324	0	0	0
10	25	250	2	4	100
8	14	112	4	16	224
6	1	6	6	36	36
	f or n =100	**fx =1200**			**fd^2 =848**

$$\text{A. M.} = \frac{1200}{100} = 12$$

(i) प्रत्यक्ष विधि :

$$= \sqrt{\frac{d^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{848}{100}}$$

$$= \sqrt{8\ 48}$$

2 91 उत्तर

(ii) लघु विधि :

मान लीजिए कल्पित माध्य =14 है।

x	f	dx	dx^2	f.dx	$f.dx^2$
20	2	6	36	12	72
18	4	4	16	16	64
16	9	2	4	18	36
14	18	0	0	0	0
12	27	2	4	54	108
10	25	4	16	100	400
8	14	6	36	84	504
6	1	8	64	8	64
	f or n =100			*fdx* = 200	***fdx*² =1248**

$$\sqrt{\frac{fdx^2}{n} - \left(\frac{fdx}{n}\right)^2} \qquad \sqrt{\frac{1248}{100} - \left(\frac{200}{100}\right)^2}$$

$$\sqrt{12\ 48\ \ 4}$$

$$\sqrt{8\ \ 48}$$

2 91 उत्तर

अथवा (दूसरे सूत्र का प्रयोग करते हुए)

$$\sqrt{\frac{fdx^2}{n} - (a - x)^2}$$

$$\sqrt{\frac{1248}{100} - (12 - 14)^2}$$

$$\sqrt{[1248 - (-2\ )^2\ ]}$$

$$\sqrt{[12\ \ 48\ -4]}$$

$$\sqrt{8\ 48}$$

2 91 उत्तर

उदाहरण 6—निम्नांकित आँकड़ों का प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए—

वेतन (रुपयों में)	0—4	4—8	8—12	12—16	16—20	20—24
व्यक्तियों की संख्या	5	7	10	15	7	6

हल (i) प्रत्यक्ष विधि :

वेतन (रुपयों में)	**व्यक्तियों की संख्या (f)**	**मध्य बिन्दु (x)**	**fx**	**d**	**d^2**	**$f.d^2$**
0—4	5	2	10	10·4	108·16	540·80
4—8	7	6	42	6·4	40·96	286·72
8—12	10	10	100	2·4	5·76	57·60
12—16	15	14	210	1·6	2·56	38·40
16—20	7	18	126	5·6	31·36	219·52
20—24	6	22	132	9·6	92·16	552·96
	f or n =50		***fx* =620**			***fd^2* =1696·00**

$$\text{A. M.} = \frac{620}{50} = 12\ \ 4$$

$$= \sqrt{\frac{fd^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{1696}{50}}$$

$$= \sqrt{33\ \ 92}$$

$$= 5\ \ 824$$

उत्तर

(ii) लघु विधि :

मान लीजिए कल्पित माध्य =14 है।

वेतन (रुपयों में)	**व्यक्तियों की संख्या (f)**	**मध्य बिन्दु (x)**	**dx**	**dx^2**	**f.dx**	**$f.dx^2$**
0—4	5	2	12	144	60	720
4—8	7	6	8	64	56	448
8—12	10	10	4	16	40	160
12—16	15	14	0	0	0	0
16—20	7	18	4	16	28	112
20—24	6	22	8	64	48	384
	f or n =50				*fdx* = 80	***fdx^2* =1824**

$$= \sqrt{\frac{fdx^2}{n} - \left(\frac{fdx}{n}\right)^2}$$

$$\sqrt{\frac{1824}{50} \quad \frac{80}{50}^{2}}$$

$$\sqrt{\frac{1824}{50} \quad \frac{64}{25}}$$

$$\sqrt{\frac{1824 \quad 128}{50}}$$

$$\sqrt{\frac{1696}{50}}$$

$$\sqrt{33 \quad 92}$$

$$= 5 \quad 824$$

उत्तर

(iii) पद विचलन विधि :

मान लीजिए कल्पित माध्य =14 है।

वेतन (रुपयों में)	व्यक्तियों की संख्या (f)	मध्य बिन्दु (x)	dx	$\frac{dx}{i}$	fdx	dx^2	fdx^2
0—4	5	2	12	3	15	9	45
4—8	7	6	8	2	14	4	28
8—12	10	10	4	1	10	1	10
12—16	15	14	0	0	0	0	0
16—20	7	18	4	1	7	1	7
20—24	6	22	8	2	12	4	24
	f or n =50				***fdx* =–20**		***fdx*² =114**

$$i\sqrt{\frac{fd\,x^2}{n} \quad \frac{fdx}{n}^{2}}$$

$$4\sqrt{\frac{114}{50} \quad \frac{20}{50}^{2}}$$

$$4\sqrt{2 \;\, 28 \quad 0 \;\, 16}$$

$$4\sqrt{[2 \;\, 12]}$$

$$5 \;\, 824$$

उत्तर

उदाहरण 7—मध्यका (Median) का प्रयोग करते हुए अग्रांकित आँकड़ों का माध्य विचलन ज्ञात कीजिए—

वेतन (रुपयों में)	0—4	4—8	8—12	12—16	16—20	20—24
व्यक्तियों की संख्या	5	7	10	15	7	6

वेतन समूह (वर्गान्तर)	आवृत्ति (f)	संचयी आवृत्ति (c.f.)	मध्य बिन्दु (x)	deviation from median (d)	f.d.	$f.d^2$
0—4	5	5	2	10 8	54 0	583 20
4—8	7	12	6	6 8	47 6	323 68
8—12	10	22	10	2 8	28 0	78 40
12—16	15	37	14	1 2	18 0	21 60
16—20	7	44	18	5 2	36 4	189 28
20—24	6	50	22	9 2	55 2	507 84
					***fdx* = 239·2**	**$f.dx^2$ = 1704·00**

यहाँ n 50 है अत: मध्यका वर्ग वह होगा जिसमें $\frac{n}{2}$ पद स्थित है।

$\frac{n}{2}$ $\frac{50}{2}$ 25

25वाँ पद 12 16 वेतन वाले वर्ग में स्थित है।

$$\text{Median (m)} = l_1 + \frac{i}{f}(n / 2 - c)$$

$$\text{Median (m)} = 12 + \frac{4}{15}(25 - 22)$$

$$\text{Median (m)} = 12 + \frac{4}{15} \quad 3$$

$$\text{Median (m)} = 12 + \frac{12}{15} = 12 \ \ 8$$

$$\text{Median Deviation} \quad m = \frac{\text{fdm}}{n}$$

$$m = \frac{239 \ \ 2}{50} = 4 \ \ 784$$ उत्तर

$$\text{Standard Deviation} = \sqrt{\frac{f.d^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{1704}{50}}$$

$$= 5 \ \ 837$$ उत्तर

सामाजिक अनुसन्धान में सांख्यिकी
(Statistics in Social Research)

आज समाजशास्त्र तथा अन्य सामाजिक विज्ञानों में सांख्यिकी का प्रयोग दिन-प्रतिदिन बढ़ता जा रहा है क्योंकि इनकी सहायता से सामग्री की वास्तविक वस्तु-स्थिति को सूक्ष्म एवं यथार्थ रूप में समझा जा सकता है। सांख्यिकी एक प्रकार का ऐसा उपकरण है जिसके प्रयोग द्वारा अनुभवाश्रित अन्वेषण के प्रत्येक चरण में आने वाली समस्या का समाधान किया जा सकता है। क्योंकि सांख्यिकी का प्रयोग विविध समस्याओं को समझने के लिए किया जाता है अत: इसे मानव कल्याण का अंकगणित भी कहा गया है।

सांख्यिकी का अर्थ एवं परिभाषाएँ
(Meaning and Definitions of Statistics)

'सांख्यिकी' शब्द अंग्रेजी के शब्द 'Statistics' का हिन्दी रूपान्तर है जोकि लैटिन भाषा के *'Status'* शब्द से बना है। कुछ लोग इसकी उत्पत्ति इटालियन भाषा के शब्द *'Statista'* अथवा जर्मन भाषा के शब्द *'Statistik'* से भी जोड़ते हैं। इन शब्दों का अर्थ सम्बन्धित भाषाओं में पहले राजनीतिक रूप से राज्य-व्यवस्था के लिए किया जाता था परन्तु इसका आधुनिक प्रचलन 18वीं शताब्दी में हुआ जबकि **गाटफ्रायड आकेनवाल** (Gottfried Achenvell) ने सर्वप्रथम इस शब्द का प्रयोग किया।

'सांख्यिकी' शब्द का प्रचलन सामान्य रूप से दो प्रकार से किया जाता है—

(i) बहुवचन में तथा

(ii) एकवचन में।

बहुवचन में इसका अभिप्राय समंकों, सामग्री अथवा आँकड़ों से है; जैसे कि अपराध, व्यापार, राष्ट्रीय आय, आयात-निर्यात सम्बन्धी सामग्री; जबकि एकवचन में 'सांख्यिकी' शब्द का अर्थ सांख्यिकीय विज्ञान से लगाया जाता है अर्थात् इसका प्रयोग सांख्यिकीय पद्धति के रूप में किया जाता है जिसके द्वारा संकलित सामग्री को क्रमबद्ध किया जाता है तथा उसका विश्लेषण एवं निर्वचन किया जाता है। प्रमुख विद्वानों ने सांख्यिकी की परिभाषाएँ निम्नलिखित प्रकार से दी हैं—

(1) कॉनर (Connor) के अनुसार—"सांख्यिकी किसी प्राकृतिक अथवा सामाजिक समस्या से सम्बन्धित माप की गणना या अनुमान का क्रमबद्ध एवं व्यवस्थित ढंग है जिससे कि इनके अन्तर्सम्बन्धों का प्रदर्शन किया जा सके।"[1]

(2) किंग (King) के अनुसार—"गणना अथवा अनुमानों के संग्रह के विश्लेषण द्वारा प्राप्त परिणामों से सामूहिक प्राकृतिक अथवा सामाजिक घटनाओं का निर्णय करने की रीति को सांख्यिकी विज्ञान कहते हैं।"[2]

(3) बॉउले (Bowley) के अनुसार—"सांख्यिकी किसी अन्वेषण से सम्बन्धित तथ्यों की ऐसी संख्यात्मक प्रस्तावनाएँ हैं जिन्हें एक-दूसरे से सम्बन्ध स्थापित करके रखा गया है।"[3] उन्होंने सांख्यिकी को गणना का विज्ञान, माध्यों का विज्ञान तथा सामाजिक जीव को एक सम्पूर्ण इकाई मानकर, सभी रूपों से उसका माप करने वाले विज्ञान के रूप में परिभाषित किया है।

(4) बोडिंगटन (Boddington) के अनुसार—"सांख्यिकी अनुमान तथा सम्भाविता का विज्ञान है।"[4]

(5) क्राक्सटन एवं **काउडन** (Croxton and Cowden) के अनुसार—"सांख्यिकी को संख्यात्मक समंकों के संग्रहण, प्रस्तुतीकरण, विश्लेषण एवं निर्वचन के रूप में परिभाषित किया जा सकता है।"[5]

1. "Statistics are measurement enumerations or estimates of natural or social phenomena systematically arranged so as to exhibit their interrelations.'' —L. R. Connor, **Statistics in Theory and Practice**, p. 8.

2. "The science of statistics is the method of judging collective natural or social phenomena from the results obtained by the analysis of an enumeration or collection of estimates.''
—W. I. King, **The Elements of Statistical Method**, p. 23.

3. "Statistics are numerical statements of facts in any department of enquiry, placed in relation to each other.'' —A. L. Bowley, **An Elementary Manual of Statistics**, p. 1.

4. "Statistics is the science of estimates and probabilities.''
—A. L. Boddington, **Statistics and its Application to Commerce**, p. 7.

5. "Statistics may be defined as a collection, presentation, analysis and interpretation of numerical data.''
—F. E. Croxton and D. J. Cowden, **Applied General Statistics**, p.1.

(6) सेक्रिस्ट (Secrist) के अनुसार—''सांख्यिकी से अभिप्राय तथ्यों के उस समूह से है जो अनेक कारणों से पर्याप्त मात्रा में प्रभावित होते हैं, जिन्हें संख्या में व्यक्त किया जाता है, जो एक उचित मात्रा की शुद्धता के आधार पर गिने या अनुमानित किए जाते हैं, किसी पूर्वनिश्चित उद्देश्य के लिए एक व्यवस्थित ढंग से एकत्रित किए जाते हैं और जिन्हें एक-दूसरे से सम्बन्ध स्थापित करने के लिए प्रस्तुत किया जा सकता है।''[6]

(7) रोबर्ट्स एवं **वालिस** (Roberts and Wallis) के अनुसार—''सांख्यिकी तथ्यों के परिमाणात्मक पहलुओं के संख्यात्मक विवरण हैं जो मदों की गिनती या माप के रूप में व्यक्त होते हैं।''[7]

सांख्यिकी की उपर्युक्त परिभाषाओं से स्पष्ट हो जाता है कि अधिकांश विद्वान् इसे एक विज्ञान मानते हैं अर्थात् इसकी परिभाषा सांख्यिकीय पद्धति या वैज्ञानिक पद्धति की एक शाखा के रूप में दी जाती है। अत: यह कहा जा सकता है कि सांख्यिकी वह प्रविधि अथवा कार्यपद्धति है जिसको संख्यात्मक तथ्यों के संकलन, प्रस्तुतीकरण तथा विश्लेषण करने के लिए प्रयोग में लाया जाता है।

सांख्यिकी की समाजशास्त्रीय उपयोगिता
(Sociological Importance of Statistics)

आज समाजशास्त्र में सांख्यिकी का प्रयोग दिन-प्रतिदिन बढ़ता जा रहा है। इसकी समाजशास्त्रीय उपयोगिता निम्नलिखित तथ्यों द्वारा स्पष्ट की जा सकती है—

(1) सरलता (Simplicity)—सांख्यिकीय पद्धतियों द्वारा समाजशास्त्र एवं अन्य सामाजिक विज्ञानों में जटिल तथ्यों को सरलतम स्वरूप प्रदान करके प्रस्तुत किया जा सकता है। उदाहरण के लिए—सम्पूर्ण सामग्री की अपेक्षा तथ्यों को औसत मूल्यों द्वारा सरलता से समझा जा सकता है।

(2) संख्यात्मक स्वरूप (Quantitative form)—समाजशास्त्रीय अनुसन्धान में अधिकतर गुणात्मक आँकड़ों को संकलित किया जाता है परन्तु सांख्यिकी का प्रयोग आँकड़ों को संख्यात्मक रूप में व्यक्त करने में सहायता प्रदान करता है। निर्वचन एवं निष्कर्ष निकालने के लिए गुणात्मक आँकड़ों को गणनात्मक (परिमाणात्मक) आँकड़ों में परिवर्तित करना अनिवार्य है।

(3) तुलना (Comparison)—सांख्यिकी का प्रयोग समाजशास्त्र में विभिन्न प्रकार से तुलना करने में सहायता प्रदान करता है। संख्याओं अथवा माध्यों से तुलना कार्य सरल हो जाता है।

(4) सहसम्बन्ध (Correlation)—सांख्यिकी के प्रयोग द्वारा एक सामाजिक वैज्ञानिक विभिन्न तथ्यों के बीच पाए जाने वाले सहसम्बन्धों को सरलता से स्पष्ट कर सकता है।

(5) व्यक्तिगत ज्ञान एवं अनुभव में वृद्धि (Enlarging individual knowledge and experience)—सांख्यिकी व्यक्तिगत ज्ञान एवं अनुभव में वृद्धि करती है। **ह्विपिल** (Whipple) के अनुसार, सांख्यिकी व्यक्ति के ज्ञान क्षेत्र को बढ़ाने में सहायता प्रदान करती है क्योंकि इसके प्रयोग द्वारा प्रत्येक समस्या की विवेचना सूक्ष्म तथा सरल रूप में की जा सकती है। अत: यह व्यक्ति के बौद्धिक विकास में सहायता प्रदान करती है।

(6) नीति-निर्माण में पथप्रदर्शन (Guidance for policy formation)—सामाजिक विज्ञानों में केवल सामाजिक समस्याओं के कारणों का ही पता नहीं लगाया जाता अपितु इन्हें दूर करने के लिए उपाय भी खोजे एवं बताए जाते हैं ताकि इनके समाधान के लिए कदम उठाए जा सकें। सांख्यिकी नीतियों के निर्धारण में सहयोग एवं सुगमता प्रदान करती है क्योंकि भावी योजनाएँ एवं नीतियाँ सांख्यिकीय तथ्यों को आधार मानकर बनाई जाती हैं।

(7) भविष्य का पूर्वानुमान (Predictions)—सांख्यिकी सामाजिक तथ्यों के बारे में आँकड़े संकलन करने तथा उन्हें निश्चयात्मक रूप प्रदान करने में सहायता देती है। भूतकालीन तथा वर्तमान तथ्यों के आधार पर सामाजिक वैज्ञानिक भविष्य का पूर्वानुमान लगाने में समर्थ हो जाता है।

---

6. "By statistics we mean aggregates of facts, affected to a marked extent by multiplicity of causes, numerically expressed, enumerated or estimated according to reasonable standard of accuracy, collected in a systematic manner for a predetermined purpose and placed in relation to each other.''

—Horace Secrist, **An Introduction to Statistical Methods**, p. 10.

7. "Statistics are numerical descriptions of the quantitative aspects of things and they take the form of counts or measurements'' —Harry V. Roberts and W. Allen Wallis, **Statistics : A New Approach**, p. 1.

(8) सिद्धान्तों एवं उपकल्पनाओं की जाँच करना (Testing theories and hypotheses)—सांख्यिकी के प्रयोग द्वारा एक सामाजिक वैज्ञानिक उपकल्पनाओं की जाँच करता है। इसके द्वारा अन्य विज्ञानों के सिद्धान्तों एवं नियमों की जाँच भी की जा सकती है।

(9) समस्याओं को समझने में सहायता प्रदान करना (Helpful in understanding problems)—सांख्यिकी द्वारा एक समाजशास्त्री किसी सामाजिक समस्या के विस्तार एवं घनत्व का पता सरलता से लगा सकता है।

राष्ट्रीय नियोजन (दोनों सामाजिक एवं आर्थिक), प्रशासन व्यवस्था, व्यापार, वाणिज्य तथा अर्थशास्त्र में सांख्यिकी का प्रयोग और भी अधिक महत्त्वपूर्ण है।

सांख्यिकी की सीमाएँ
(Limitations of Statistics)

यद्यपि सामाजिक विज्ञानों में सांख्यिकी का दिन-प्रतिदिन बढ़ता प्रयोग इसके महत्त्व का सूचक है, फिर भी इसकी कुछ सीमाएँ हैं। सांख्यिकी की प्रमुख सीमाएँ निम्न प्रकार हैं—

(1) केवल समूहों का अध्ययन (Study of aggregates)—सांख्यिकी केवल समूहों की विशेषताएँ व्यक्त करने में सहायक है। इसके द्वारा हम व्यक्तिगत इकाइयों का अध्ययन नहीं कर सकते। **किंग** (King) के अनुसार सांख्यिकी अपने विषय की प्रकृति के कारण ही व्यक्तिगत इकाइयों पर विचार नहीं कर सकती और न कभी करेगी। यदि इकाइयाँ महत्त्वपूर्ण भी हैं तो भी इनके अध्ययन के लिए अन्य साधन ढूँढने होंगे।

(2) सन्दर्भहीन सांख्यिकीय परिणाम भ्रामक (Statistical results are misleading without proper reference and context)—सांख्यिकी का दूसरा प्रमुख दोष यह है कि इसके परिणामों को ठीक प्रकार से समझने के लिए परिस्थितियों के सन्दर्भ का ज्ञान होना जरूरी है। यदि सन्दर्भ स्पष्ट नहीं है तो निष्कर्ष अस्पष्ट एवं भ्रामक हो सकते हैं।

(3) केवल संख्यात्मक तथ्यों का अध्ययन (Study of quantitative aspects only)—सांख्यिकी का एक अन्य मुख्य दोष यह है कि इसका प्रयोग केवल उन्हीं परिस्थितियों में किया जा सकता है जिनमें समस्याओं के पहलुओं को संख्याओं या अंकों में व्यक्त किया जा सकता है। इसके द्वारा गुणों का अध्ययन नहीं किया जा सकता है।

(4) आँकड़ों में सजातीयता (Homogeneous data)—सांख्यिकी से केवल सजातीय तथ्यों, आँकड़ों या सामग्री की तुलना ही की जा सकती है। यदि आँकड़ों में एकरूपता या सजातीयता नहीं है तो सांख्यिकी का प्रयोग नहीं किया जा सकता है।

(5) मापों एवं निष्कर्षों की परिशुद्धता की मात्रा (Extent of accuracy in measurements and results)—सांख्यिकीय परिणाम केवल दीर्घकाल में औसत के रूप में ही सत्य होते हैं। सांख्यिकी के नियम सार्वभौमिक नहीं हैं।

(6) दुरुपयोग (Misuse)—सांख्यिकी का प्रयोग केवल उन्हीं व्यक्तियों के लिए किया जा सकता है जिन्हें पर्याप्त ज्ञान एवं अनुभव है। जनसाधारण व्यक्तियों द्वारा इसका दुरुपयोग किया जा सकता है। **यूल** एवं **केण्डाल** (Yule and Kendall) के शब्दों में, ''अयोग्य व्यक्ति के हाथों में सांख्यिकीय विधियाँ सबसे भयानक अस्त्र हैं।''[8]

(7) समस्या के अध्ययन का साधन-मात्र (Mean of studying a problem)—सांख्यिकी समस्या के अध्ययन के लिए केवल साधन प्रस्तुत करती है, उसके समाधान के बारे में इससे कुछ पता नहीं चलता है। **क्राक्सटन** एवं **काउडन** (Croxton and Cowden) के अनुसार, यह नहीं माना जाना चाहिए कि सांख्यिकीय विधि ही अनुसन्धान में प्रयोग की जाने वाली एकमात्र विधि है और न ही यह समझना चाहिए कि प्रत्येक समस्या के समाधान का यही सर्वोत्तम हल है।

8. "Statistical methods are most dangerous tools in the hands of inexperts.''
—G. U. Yule and M. G. Kendall, **An Introduction to the Theory of Statistics**, p. xvi.